Î Û Ú Û Î Û Ò Ý Û Í

ß ½±³°®»¸»²·ª» ¬»¨¬¾±±µæ

Þ ·®¹»ô Î ò ¿²¼ ÚòÔ±«ª»¿«¨ øï çç é÷ò ×²¬®±¼«½¬·±² ¬± ¬±½¸¿¬·½ °®±¹®¿³³·²¹ò Ò»© Ç±®µô Í°®·²¹»®óÊ»®´¿¹ò

×´´«¬®¿¬·±² ±º «» ±º þª¿®·¿¾´» °´·¬¬·²¹þæ

Ù«·¹²¿®¼ô Ó ò ¿²¼ Íò Õ·³ øïçèé÷ò •Ô¿¹®¿²¹»¿² ¼»½±³°±·¬·±²æ ¿ ³±¼»´ §·»´¼·²¹ ¬®±²¹»® Ô¿¹®¿²¹»¿² ¾±«²¼ò Ó ¿¬¸»³¿¬·½¿´ Ð®±¹®¿³³·²¹ íçæ îïëóîîèò

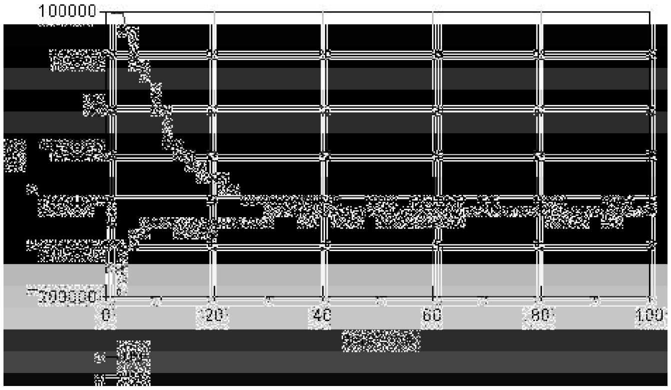
Ö±®²¬»²ô Õò ¿²¼ Ó ò Ò¿¶¾»®¹ øïçèê÷ò •ß ²»© Ô¿¹®¿²¹·¿² ®»´¿¨¿¬·±² ¿°°®±¿½¸ ¬± ¬¸» ¹»²»®¿´·¦»¼ ¿·¹²³»²¬ °®±¾´»³ò Û«®±°»¿² Ö±«®²¿´ ±º Ñ°»®¿¬·±²¿´ Î»»¿®½¸ îéæ íîïóíîíò

Ü»ª»´±°³»²¬ ±º ¬¸» Ý®±óÜ»½±³°±·¬·±² ¿´¹±®·¬¸³æ

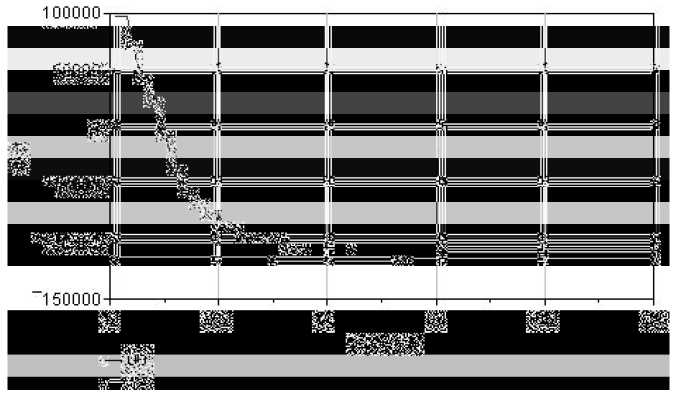
Ê¿² Î±§ô Ìò Öò øïçèí÷ò •Ý®± ¼»½±³°±·¬·±² º±® ³·¨»¼ ·²¬»¹»® °®±¹®¿³³·²¹ò Ó ¿¬¸»³¿¬·½¿´ Ð®±¹®¿³³·²¹ îëæ ìêóêíò

Ø±´³¾»®¹ô Õò øïççð÷ò •Ñ² ¬¸» ½±²ª»®¹»²½» ±º ½®± ¼»½±³°±·¬·±²ò Ó ¿¬¸»³¿¬·½¿´ Ð®±¹®¿³³·²¹ ìéæ îêçóîéëò

Ø±´³¾»®¹ô Õò øïççé÷ò •Ó »¿² ª¿´«» ½®± ¼»½±³°±·¬·±² ¿°°´·»¼ ¬± ·²¬»¹»® °®±¹®¿³³·²¹ °®±¾´»³ò Û«®±°»¿² Ö±«®²¿´ ±º Ñ°»®¿¬·±²¿´ Î»»¿®½¸ çéøï÷æ ïîìóïíèò



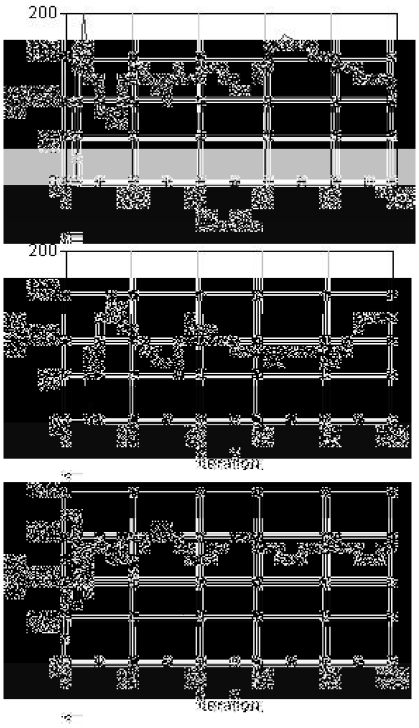
Benders' & Lagrangian subproblems at each iteration



Best upper & lower bounds at each iteration

[illegible]

Ì¸» ³ »¿² ª¿´«»- ±º º·®-¬ó-¬¿¹» ª¿®·¿¾´»- «-»¼ ·² ¬¸» º®·³ ¿´ -«¾º®±¾´»³ -¿¬ »¿½¸ ·¬»®¿¬·±²Ò



ß -¿² ¿´¬»®²¿¬·ª»Ô » ¨°±²»²¬·¿´ -³ ±±¬¸·²¹ ø© ·¬¸ -³ ±±¬¸·²¹ º¿½¬±® ïðÛ ÷©¿- «-»¼ º±® ¾±¬¸ °®·³ ¿´ ¿²¼¼«¿´ -±´«¬·±²-Ò ß º¬»® ïðð ·¬»®¿¬·±²-Ô ¬¸» º±´´±© ·²¹ ©¿- ¬¸» ¾»-¬ -±´«¬·±² º±«²¼æ

Ì±¬¿´ ½±-¬æ qïðèîïðòéèèïô º±«²¼ ¿¬ ·¬»®¿¬·±² ýêè
Þ»-¬ ´±©»® ¾±«²¼æ qïïïïèéòðíêì Ù¿°ã îçéêòîìèííô ±® îòéëðìïéíèéû
Í¬¿¹» Ñ²» Ê¿®·¿¾´»-æ ·   ÈÅ·Ã q   qqqqqq ï   ïêêòéð î   èïòçð í   îëðòèé ì   ðòïì

Ì¸·- -±´«¬·±² ·- ª»®§ ²»¿®´§ ¿² ø¿°°®±¨·³ ¿¬»÷ -±´«¬·±² ·- óüïðèíçðò

Û È ß Ó Ð Ô Û

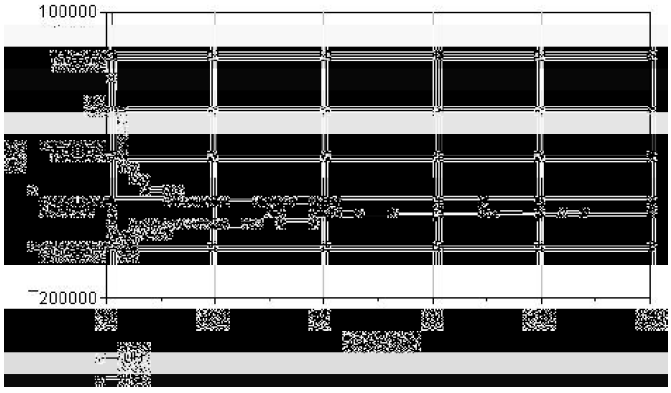
Ì ¸ » ½ ® ± - - ó ¼ » ½ ± ³ ° ± - · ¬ · ± ² ¿ ´ ¹ ± ® · ¬ ¸ ³ ¼ » - ½ ® · ¾ » ¼ ¿ ¾ ± ª » © ¿ - · ³ ° ´ » ³ » ² ¬ » ¼ · ² ¬ ¸ » ß Ð Ô

´ ¿ ² ¹ « ¿ ¹ » ø ß Ð Ô õ É x Ò Í ò ð ÷ ò Ú · ® - ¬ ô ¬ ¸ » ³ » ¿ ² ± ⁰ ¿ ´ ´ ° ® · ± ® ° ® · ³ ¿ ´ ú ¼ « ¿ ´ - ± ´ « ¬ · ± ² - © ¿ - « - » ¼

¿ ¬ » ¿ ½ ¸ · ¬ » ® ¿ ¬ · ± ² ò Ì ¸ » ® » - « ´ ¬ ¿ ⁰ ¬ » ® ï ð ð · ¬ » ® ¿ ¬ · ± ² - © ¿ - ¿ - ⁰ ± ´ ´ ± © - æ

Ì ± ¬ ¿ ´ ½ ± - ¬ æ q ï ð ê ì ë ê ò ç ì ô ⁰ ± « ² ¼ ¿ ¬ · ¬ » ® ¿ ¬ · ± ² ý é î
Þ » - ¬ ´ ± © » ® ¾ ± « ² ¼ æ q ï ï ð é ë î ò ï é Ù ¿ ° ã ì î ç ë ò î í ô ± ® ì ò ð í û
Í ¬ ¿ ¹ » Ñ ² » Ê ¿ ® · ¿ ¾ ´ » - æ · È Å · Ã q q q q q q ï ï ë ç ò é î î è í ò í í í î ë ð ò ð ð ì ê ò ç ì

Ì ¸ » ° ´ ± ¬ ± ⁰ « ° ° » ® ú ´ ± © » ® ¾ ± « ² ¼ - ¿ ¬ » ¿ ½ ¸ · ¬ » ® ¿ ¬ · ± ² æ

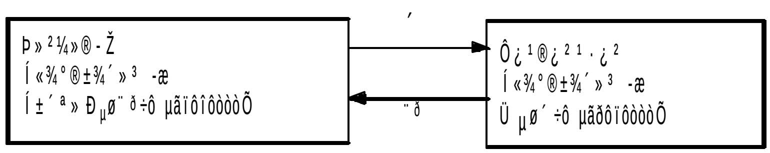


Ý ÎÑÍÍ óÜ ÛÝÑÓÐÑÍ×Ì×ÑÒ

Ò ± ¬» ¬¸¿¬ ¬¸» ¿´¹±®·¬¸³½¿²¾» þ-¬®»¿³ ´·²»¼þóó ±²´§ ±²» ±º ¬¸» ¼«¿´ -«¾°®±¾´»³ -Ü ðø´÷ ²»»¼- ¬± ¾» -±´ª»¼ ¿¬ »¿½¸ ·¬»®¿¬·±²ô »¨½»°¬ ©¸»² ²¬¸» ¬»®³ ·²¿¬·±² ½®·¬»®·±²

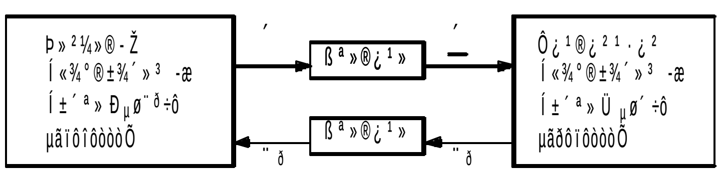
Ðø¨ ð÷ó Ü øλ÷} *ε*

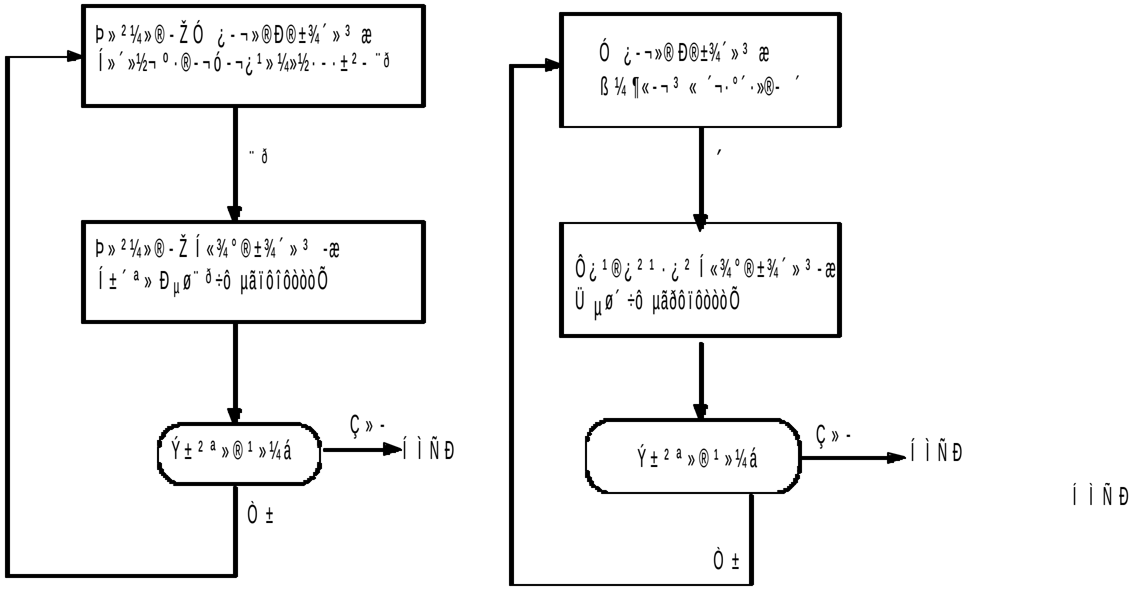
·- ¬± ¾» ¬»-¬»¼ò



Ó ÛßÒ Ê ßÔËÛ Ý ÎÑÍÍ Ü ÛÝÑÓÐÑÍ×Ì×ÑÒ

Ý±²ª»®¹»²½» ·- ³ ®±ª»¼ ¾§ ¿´¬»®²¿¬·²¹ ±º ¿´´ °®»ª·±«- -±´«¬·±²- ¬± ¬¸» Ô¿¹®¿²¹·¿² ³« ´¬·°´·»®- ¿²¼ °®·³¿´ -±´«¬·±²- ¬± ¬¸» Ô¿¹®¿²¹·¿² ¿²¼ Þ»²¼»®- -«¾°®±¾´»³ -ô ®»-°»½¬·ª»´§ò





Ý ÎÑÍÍóÜ ÛÝÑÓÐÑÍ×Ì×ÑÒ

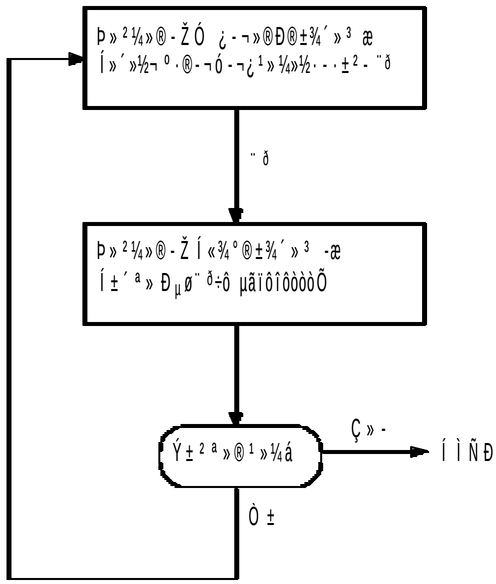
Ý®±--ó¼»½±³°±-·¬·±² ·- ¿ ¸§¾®·¼ ±º Þ»²¼»®-ù ¼»½±³°±-·¬·±² ¿²¼ Ô¿¹®¿²¹·¿² ®»´¿¨¿¬·±²ô ·² ©¸·½¸ ¬¸» -«¾°®±¾´»³ ± º »¿½¸ ¿´¹±®·¬¸³ -»®ª»- ¬¸» °«®°±-» ±º ¬¸» ³ ¿-¬»® °®±¾´»³ ±º ¬¸» ±¬¸»®ò

Ì¸¿¬ ·-ô Þ»²¼»®-ù -«¾°®±¾´»³ ®»½»·ª»- ¬¸» º·®-¬ó-¬¿¹» ¼»½·-·±²- ¨ð º®±³ ¬¸» Ü«¿´ -«¾°®±¾´»³ Ü ð ®¿¬¸»® ¬¸¿² º®±³ ¬¸» Þ»²¼»®-ù ³ ¿-¬»® °®±¾´»³ ò

	×²º±®³ ¿¬·±²	Ü«¿´ Í«¾°®±¾´»³ ð º±®
Ó ·² º ¯ § µ -«¾¶»½¬ ¬± É § ã Ø ¸ ó Ì ¨ð ÷ § ³ ð ø¨ ð ÷ ¼»½ ÷	¨ ð	Ó ·² ¹ ½½¨ ó ÿ µ ò µãï -«¾¶»½¬ ¬± ¨ð Î È
	¾ ¾ ¾ ¾ ¾ br ¬ ¾ ¾	

Ô·µ»©·-» ¬¸» Ü«¿´ -«¾°®±¾´»³ Ü ð ®»½»·ª»- ¬¸» ³«´¬·°´·»®- ´ º®±³ ¬¸»

Þ»²¼»®-ù -«¾°®±¾´»³ ô ®¿¬¸»® ¬¸¿² º®±³ ¬¸» Ü«¿´ ³ ¿-¬»® °®±¾´»³ ò



×² »·¬¸»® ¬¸» Ô¿¹®¿²¹·¿² ®»´¿¨¿¬·±² ¿°°®±¿½¸ ±® Þ»²¼»®-ù ¼»½±³°±-·¬·±²ô ¬¸» ¾«®¼»² ±º ¬¸» ½±³°«¬¿¬·±² ´·»- ·² ¬¸» ®»-°»½¬·ª» ³ ¿-¬»® °®±¾´»³ -æ -»¿®½¸·²¹ º±® ¬¸» ±°¬·³ ¿´ ·² ¬¸» ½¿-» ±º Ô¿¹®¿²¹·¿² ®»´¿¨¿¬·±²ô ú -»¿®½¸·²¹ º±® ¬¸» ±°¬·³ ¿´ ¨ ð ·² ¬¸» ½¿-» ±º Þ»²¼»®-ù ¼»½±³°±-·¬·±²ò

Ì¸» -«¾°®±¾´»³ -ô ¾»·²¹ -»°¿®¿¾´» ¾§ -½»²¿®·±ô ¿®» »¿-·´§ -±´ª»¼ ·² °¿®¿´´»´ò

Ì¸» ±®·¹·²¿´ °®±¾´»³ ² ±© ·- -»»² ¬± ¾» »¯«·ª¿´»²¬ ¬±

Ó ·² ½¨ð õ ; °µ Ðµ Ø¨ð÷

-«¾¶»½¬ ¬± ¨ð R È

Þ§³ ¿µ·²¹ «-» ±º ¼«¿´ ·²º±®³ ¿¬·±² ±¾¬¿·²»¼ ¿º¬»® Ó»ª¿´«¿¬·±²- ±º Ðµ Ø¨ð÷ô Þ»²¼»®-ù

°®±½»¼«®» º±®³ -¿²¿°°®±¨·³ ¿¬·±² ø¿½±²ª»¨ °·»½»© ·-»ó´·²»¿® º«²½¬·±²÷ ±º Ðµ Ø¨ð÷æ

Ðµ Ø¨ð÷ m ³¿¨ ¥αµ ¨ð õ βµ£

-± ¬¸¿¬ ¬¸» ±®·¹·²¿´ °®±¾´»³ ®»¼«½»- ø© ·¬¸ ·²¬®±¼«½¬·±² ±º ²»© ª¿®·¿¾´»- θµ÷¬±

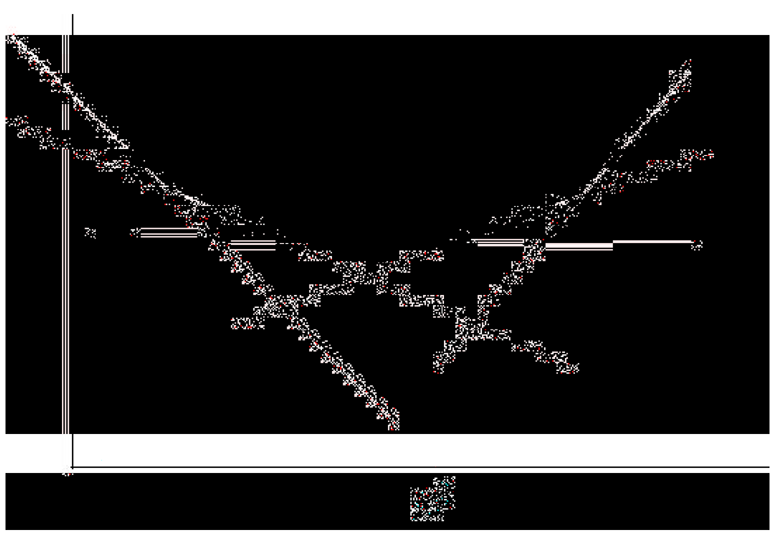
Ó ·² ½¨ð õ ; °µθµ

-«¾¶»½¬ ¬± ¨ð R È

¿²¼

θµ m αµ ¨ð õ βµ ô ·ãïô òòòÓ å µãïô òòòÕ

Ì¸¿¬ ·- ·ô © » ¸¿ª» ¿ °°®±¨·³ ¿¬»¼ Ðµ Ø¨ð÷ ¾§ ¬¸» ³ ¿¨·³ « ³ ±º ¿ º·²·¬» ²«³¾»® ±º ´·²»¿® º«²½¬·±²- ô ·ãïô òòòÓ ¾§ ¿ °·»½»© ·-» ó´·²»¿®½±²ª»¨ º«²½¬·±²æ



Ú«®¬¸»®³ ±®»ô -±´ª·²¹ »¿½¸ ÔÐ °®±ª·¼»- «- © ·¬¸ ¿ ª»½¬±® λ ±º ¼«¿´ ª¿®·¿¾´»-

½±®®»-°±²¼·²¹ ¬± ¬¸» ½±²-¬®¿·²¬- ¨ð ã ¨µò

×º ºµ ·- ¬¸» ¼«¿´ -±´«¬·±² ±º ¬¸» ÔÐ

Ðµ Ø¨ð ÷ã ³ .² ¯µ §µ

-«¾¶»½¬ ¬± É §µ ã ¸µ ó Ìµ ¨ðô §µ m ð

¬¸»² λµ ã óÌµ ìπµ

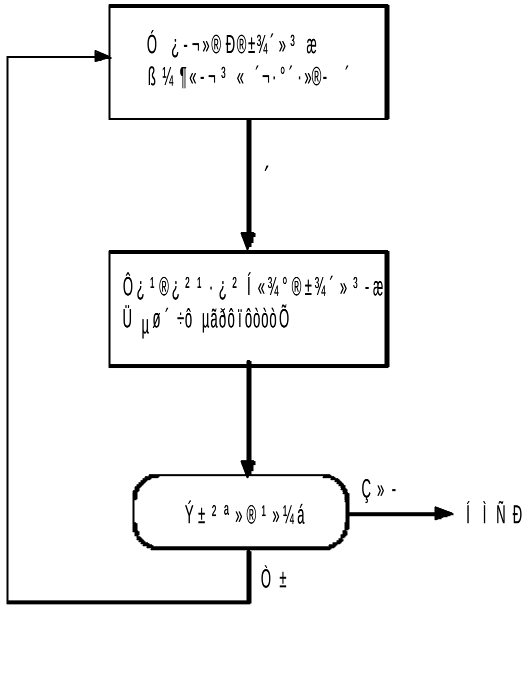
ß² ¿-·¼»æ Ý±³°«·²¹ λµæ
Ì¸» ¼«¿´ ±º

Ó .² ¯µ §µ
-«¾¶»½¬ ¬±
Ìµ ¨µ õ É §µ ã ¸µô
¨µ ã ¨ðô
¨µ m ð

·- ¬¸» ÔÐ

Ó ¿¨ ¸µ πµ õ ¨ð λµ
-«¾¶»½¬ ¬±æ
Ìµ ìπµ õ ×λµ ã ð
É ìπµ } ¯µ

×º ©» »´·³ ·²¿¬» λµ «-·²¹ ¬¸» »¯«¿´·¬§ ©» ±¾¬¿·² λµ ã óÌµ ìπµ ¿²¼ ¬¸» ¼«¿´ ÔÐ
Ó ¿¨ Ø¸µ óÌµ ¨ð ÷πµ
-«¾¶»½¬ ¬±
É ìπµ } ¯µ



Þ ÛÒÜÛÎ ÍÙÜ ÛÝÑÓÐÑÍ×Ì×ÑÒ

Þ»²¼»®-ù °¿®¬·¬·±²·²¹ ø½±³ ±²´§µ²±©² ·² -¬±½¸¿-¬·½ °®±¹®¿³³·²¹ ¿- ¬¸» þÔóÍ¸¿°»¼ Ó»¬¸±¼þ÷ ¿½¸·»ª»- ¬¸» °¿®¬·¬·±² ¾§ ¬¸» -»½±²¼ -¬¿¹» ª¿®·¿¾´»- -±´ª·²¹ ¬¸» °®·³¿´ ¿²¼ ¼«¿´ Ù ·ª»² ¿ º·¨»¼ ª¿´«» -±´ª» ¬¸» ¼«¿´ -«¾°®±¾´»³ º±® »¿½¸ -½»²¿®·± µãïô ›Õ ¬¸» -«¾°®±¾´»³ ¿²¼ ¬¸»² -±´ª» ¬¸» ÔÐæ

Ðµ Ø¨ð÷ã ³ ·² ¯µ §µ

-«¾¶»½¬ ¬± É §µ ã ¸µ ó Ìµ ¨ð §µ m ð

Ì¸»² Ð Ø¨ð÷ã ½¨ð õ ∑ °µ Ðµ Ø¨ð÷ °®±ª·¼»- «- © ·¬¸ ¿² «°°»® ¾±«²¼ ¬¸» ±°¬·³¿´ ½±-¬

Æ ô ·ò»òô

Ü øÆ÷ } Æ } Ð Ø¨ð÷

Ì ¸ ·- ·- ³ ± ¬ · ª ¿¬»¼ ¾§ ¬¸» º¿½¬ ¬¸¿¬ ¬¸» °®±¾´»³ ¬¸»² » º¿®¿¬»- · ²¬± Õõï «¾°®±¾´»³ æ

Ü ø𝝀÷ã Ü ð ø𝝀 ôÕ 𝝀 Õ ÷õ ; (µãï … Õ) Ü µ ø𝝀µ ÷

© ¸ »®»

Ü ð ø𝝀÷ã ³ ·² 8 ½ ó ; (µãï … Õ) 𝝀µ) ¨ð

«¾¶»½¬ ¬± ¨ð R È

¿ ²¼ º ±® »¿½¸ µãï ô › Õ æ

Ü µ ø𝝀÷ã ³ ·² 𝝀µ ¨µ õ °µ ¯µ § µ

«¾¶»½¬ ¬± Ì µ ¨µ õ É § µ ã ¸ µ

¨µ m ð ô § µ m ð

	Ü «¿´ Í«¾°®±¾´»³ º±®
³ ·² 8 ½ ó ; (µãï) 𝝀µ) ¨ð «¾¶»½¬ ¬± ¨ð R È	ó ·² 𝝀µ ¨µ õ °µ ¯µ § µ «¾¶»½¬ ¬± Ì µ ¨µ õ É § µ ã ¸ µ ¨µ m ð ô § µ m ð

Ì ¸» ª¿´«» Ü ø𝝀÷ã Ü ð ø𝝀 ôÕ 𝝀 Õ ÷õ ; (µãï … Õ) Ü µ ø𝝀µ ÷ °®±ª·¼» ¿ ´±©»® ¾±«²¼ ±² ¬¸» ±°¬·³ ¿´

½±¬ Æò

Ì ¸» Ô¿¹®¿²¹·¿² ¼«¿´ °®±¾´»³ · ¬± »´»½¬ ¬¸» ³ «´¬·°´·»® © ¸ ·½¸ ¹·ª» ¬¸» ¬·¹¸¬»¬ ´±©»® ¾±«²¼æ

Ü ã ³ ¿¨ 𝝀 Ü ø𝝀÷

Ò ± ¬»æ ×² ¬¸» ´·²»¿® ½¿» ¬¸»² Ü ã Æ ¿²¼ ¬¸»®» · ²± ¼«¿´·¬§ ¹¿°ò

þÍÐÔ×ÌÌ×ÒÙþ Ú×ÎÍÌÓÍÌßÙÛÊßÎ×ßÞÔÛÍ

Ú±® »¿½¸ -½»²¿®·± µÔ ¼»º·²» ¿ º·®-¬ó-¬¿¹» ¼»½···±² ¨µ ©¸·½¸ ³ «-¬ »¯«¿´ ¬¸» ±®·¹·²¿´ º·®-¬ó -¬¿¹» ¼»½···±² ø©¸·½¸ ©» ²±© ¼»²±¬» ¾§ ¨ð÷ò É» ½¿² ¬¸»² ©®·¬» ¬¸» »¯«·ª¿´»²¬ ÔÐæ

Æ ã ³·² ½¨ð õ ; º µ ¯ µ § µ (µãï)

-«¾¶»½¬ ¬±

¨ð R È

Ìµ¨µ õ É§µ ã ¸µ ô µ ãï ô òòòÕ

¨ð ã ¨µ ô µ ã ï ô òòòÕ

¨µ m ð ô µ ã ï ô òòòÕ

×² ±®¼»® ¬± -»º¿®¿¬» ¬¸» ÔÐ ¾§ -½»²¿®·± ©» ²»»¼ ¬± þ®»´¿¨þ ¬¸» ½±²²-¬®¿·²¬-

¨ð ã ¨µôµ ã ïôÕ Õå

ïç

Ôß ÙÎßÒÙ×ßÒ ÎÛÔßÈßÌ×ÑÒ

Ù·ª»² ¿ º¿³·´§ ±º Ô¿¹®¿²¹·¿² ³«´¬·°´·»® ª»½¬±®- ´µ ô µãï ô Õ ô ©» ¼»º·²» ¬¸» ®»´¿¨»¼ ¬·±²æ

Ü ø𝝀÷ ã ³·² ½¨ð õ ; º µ ¯ µ § µ õ ; 𝝀µ ø¨µ ó ¨ð÷ (µãï, µãï)

-«¾¶»½¬ ¬± ¨ð R È

Ìµ¨µ õ É§µ ã ¸µôµ ã ïôÕ Õå

¨µ m ðôµ ã ïôÕ Õå§µ m ðôµãïôîôòòòÕ

Ì¸¿¬ ·-ô

Ü ø𝝀÷ ã ³·² ½ ó ; 𝝀µ ¨ð õ ; º µ ¯ µ § µ õ 𝝀µ¨µ (µãï, µãï)

-«¾¶»½¬ ¬± ¬¸» ¿¾±ª» ½±²-¬®¿·²¬-ò

îð

Ü ÛìÛÎÓ×Ò×ÍÌ×Ý ÛÏË×Êß ÔÛÒÌ ÔÐæ

Ó ·²·³ ·¦»ïëð ¨ õ îíð ¨ õ îêð ¨ õ ïîíè§ óïéð© õ îïð§ óïëð© óíê© óïð© ÷

õ ïîíè§ óïéð© õ îïð§ óïëð© óíê© óïð© ÷

õ ïîíè§ óïéð© õ îïð§ óïëð© óíê© óïð© ÷

·«¾¶»½¬ ¬±

¨ õ ¨ õ ¨ } ëðð

	Í½»²¿®·± î	
í ¨ õ § ó© m îðð	îòë ¨ õ § ó© m îðð	î ¨ õ § ó© m îðð
íòê ¨ õ § ó© m îìð	í ¨ õ § ó© m îìð	îòì ¨ õ § ó© m îìð
îì ¨ ó © ó © m ð	îð ¨ ó © ó © m ð	ïê ¨ ó © ó © m ð
© } êððð	© } êððð	© } êððð

¨ m ðô ·ã ïôîôíå

§ m ðô ·ã ïôîúµã ïôîôíå

© m ðô ·ã ïôîôíôìúµã ïôîôí

Ì¸«-ô ¿´´ °±-·¾´» -»½±²¼ó-¬¿¹» ¼»½··±²- ¿®» ³¿¼» ··³«´¬¿²»±«-´§ô ²¿ ··²´» ´¿®¹» ÔÐò

Ñ°¬·³¿´ Í±´«¬·±²æ Û¨°»½¬»¼ °®±º·¬ã üïðèôíçð

		É¸»¿¬	Ý±®²	Í«¹¿® Þ»»¬-
Ú·®-¬ -¬¿¹»	Ð´¿²¬æ	ïéð ß½®»-	èð ß½®»-	îëð ß½®»-
µã ï	Ç·»´¼	ëïð Ì	îèè Ì	êððð Ì
þÙ±±¼§»¿®þ	Í¿´»-	íïð Ì	ìè Ì	êððð Ì
	Ð«®½¸¿-»	óó	óó	óó
µã î	Ç·»´¼	ììë Ì	îìð Ì	ëððð Ì
þÚ¿·®§»¿®þ	Í¿´»-	îîë Ì	óó	ëððð Ì
	Ð«®½¸¿-»	óó	óó	
µã í	Ç·»´¼	íìð Ì	ïçî Ì	ìððð Ì
þÞ¿¼§»¿®þ	Í¿´»-	ïìð Ì	óó	ìððð Ì
	Ð«®½¸¿-»	óó	ìè Ì	óó

× Ë-·²¹ ¬¸» ±®·¹·²¿´ -±´«¬·±² ø©¸»®» »¨°»½¬»¼ ª¿´«»- ±º § ·»´¼- © »®» ¿--«³»¼ô ·ò»òô

°´¿²¬·²¹ ïîð ¿½®»- ±º ©¸»¿¬ô èð ¿½®»- ±º ½±®²ô íðð ¿½®»- ±º ¾»»¬-÷ ¸¿- »¨°»½¬»¼ °®±º·¬

©±«´¼¾» üïðéôîìð ø©¸·½¸ ·- üïôïëð ´»-- ¬¸¿² ¬¸» ±°¬·³¿´ ª¿´«»÷ ò

Ì¸» Û¨°»½¬»¼ Ê¿´«» ±º Ð»®º»½¬ ×²º±®³¿¬·±² ·- üïïëôìêê ó üïðèôíçð ã üéôðïê

Ý ± ² - · ¼» ® ¬ ¸ » ¼» ¬ » ® ³ · ² · - ¬ · ½ ÔÐ ¼» ® · ª » ¼ º ® ± ³ ¬ ¸ » Î ó - ¬ ¿ ¹ » - ¬ ± ½ ¸ ¿ - ¬ · ½ ÔÐ æ

Æ ã ³ ·² ½ ¨ õ ¦ º µ ¯ µ § µ
µ ã ï

- « ¾ ¶ » ½ ¬ ¬ ±

Ì µ ¨ õ É § µ ã ¸ µ ôµ ã ïôÕ Õ å

¨ R È

§ µ m ðô µ ã ïôÕ Õ

© ¸ » ® » ¬ ¸ » º » ¿ - · ¾ ´ » - » ¬ ± º º · ® - ¬ ó - ¬ ¿ ¹ » ¼» ½ · - · ± ² - · - ¼» º · ² » ¼ ¾ §

È ã ¥ ¨ R Î ² æß ¨ ã ¾ ô ¨ m ð £

Û È ß Ó Ð Ô Û æ

Í » ½ ± ² ¼ - ¬ ¿ ¹ » ¼» ½ · - · ± ² - æ

Ú ± ® » ¿ ½ ¸ - ½ » ² ¿ ® · ± µ øµãïôîôí ÷ô ¼» º · ² » ¿ - » ¬ ± º ¼» ½ · - · ± ² ª ¿ ® · ¿ ¾ ´ » - æ

© µ ï ã ¬ ± ² - ± º © ¸ » ¿ ¬ - ± ´ ¼

© µ î ã ¬ ± ² - ± º ½ ± ® ² - ± ´ ¼

© µ í ã ¬ ± ² - ± º ¾ » » ¬ - - ± ´ ¼ ¿ ¬ üíêñÌ

© µ ì ã ¬ ± ² - ± º ¾ » » ¬ - - ± ´ ¼ ¿ ¬ üïðñÌ

§ µ ï ã ¬ ± ² - ± º © ¸ » ¿ ¬ ° « ® ½ ¸ ¿ - » ¼

§ µ î ã ¬ ± ² - ± º ½ ± ® ² ° « ® ½ ¸ ¿ - » ¼

Ì É Ñ ÓÍ Ì ßÙÛ Ô×ÒÛßÎ ÐÎ ÑÙÎßÓÓ×ÒÙÉ×ÌØ ÎÛÝÑËÎÍÛ

Ó ·²·³ ·¦» ¦ ã ½¨ õ Û ³ ·²¯ Ø÷§ Ø÷%

-«¾¶»½¬ ¬±

ß ¨ ã ¾

Ì Ø÷¨ õ É § Ø÷ã ¸Ø÷ô

¨ m ðô§ Ø÷m ð

©¸»®»

¨ ã º·®-¬ó-¬¿¹» ¼»½···±²

¿²¼

§ Ø÷ã -»½±²¼ó-¬¿¹» ¼»½···±² ¿º¬»® ®¿²¼±³ »ª»²¬ · ±¾-»®ª»¼

©¸·½¸ «-¬ -¿¬·-º§ ¬¸» -»½±²¼ó-¬¿¹» ½±²-¬®¿·²¬-

Ì Ø÷¨ õ É § Ø÷ã ¸Ø÷ô

©¸»®» ¯Ø÷ô Ì Ø÷ú ¸Ø÷ ¿®» ®¿²¼±³ ª¿®·¿¾´»-

Ü ÛÌ ÛÎ Ó×Ò×Í Ì×Ý Û ÏË×Êß Ô ÛÒÌ ÐÎ ÑÞ ÔÛÓ

ß --«³ » ¿ º·²·¬» ²«³ ¾»® ±º -½»²¿®·±-ò

Ú±® »¿½¸ -½»²¿®·± µô ¼»º·²» ¿ -»¬ ±º -»½±²¼ó-¬¿¹» ª¿®·¿¾´»-ô §µô ¿²¼ ¿®®¿§- Ìµ ô ¯µ ô ¿²¼ ¸µ

Ì¸» ±¾¶»½¬·ª» ·- ¬± ³·²·³·¦» ¬¸» »¨°»½¬»¼ ª¿´«» ±º ¬¸» ±¾¶»½¬·ª» º«²½¬·±² ±º »¿½¸ -»½±²¼ -¬¿¹»-

Ó ·²·³ ·¦» ½¨ õ Í µãï º µ Ï µ Ø¨÷

-«¾¶»½¬ ¬± ¨ R È

©¸»®» ¬¸» ½±-¬ º±® ¬¸» -»½±²¼ -¬¿¹» ··

Ï µ Ø¨÷ã Ó ·²·³ «³ ¥¯µ§æÉ § ã ¸µ óÌµ ¨ô§ m ð£

Ì ¸ » - ¬ ± ½ ¸ ¿ - ¬ · ½ ¼ » ½ · - · ± ² ° ® ± ¾ ´ » ³ · - ¬ ± ± ° ¬ · ³ · ¦ » ¬ ¸ » ° · ® - ¬ ó - ¬ ¿ ¹ » ½ ± - ¬ ° ´ « - ¬ ¸ » » ¨ ° » ½ ¬ » ¼
- » ½ ± ² ¼ ó - ¬ ¿ ¹ » ½ ± - ¬ - æ

Ó .² .³ · ¦ » ïëð ¨ ï õ î íð ¨ î õ îêð ¨ í õ Ï / í ¸ µ ã ï Ï µ ø ¨ ÷

- « ¾ ¶ » ½ ¬ ± ¨ ï õ ¨ î õ ¨ í } ëðð

¨ ¶ m ð ô ¶ ã ï ôî ôí

© ¸ » ® »

Ï µ ø ¨ ÷ ã - » ½ ± ² ¼ ó - ¬ ¿ ¹ » ½ ± - ¬ - · ² - ½ » ² ¿ ® · ± µ ô · ⁰ ⁰ · ® - ¬ ó - ¬ ¿ ¹ » ¼ » ½ · - · ± ² - ¨ ¸ ¿ ª » ¾ » » ²
.³ ° ´ » ³ » ² ¬ » ¼

Ï ï ø ¨ ÷ ã Ó .²,³ « ³ ïé ð© ï õ ïëð© î õ íê© í õ ïð© ì ó î íè§ ï ó î ïð§ î
-ò¬ò§ ï ó © ï m îðð ó í ¨ ï
§ î ó © î m î ìðóíòê ¨ î
© í õ © ì } îì ¨ í
§ ï m ðô§ î m ð ô © ï m ðô© î m ðô ð } © í } êððð ô© ì m ð

Ï î ø ¨ ÷ ã Ó .²,³ « ³ ïé ð© ï õ ïëð© î õ íê© í õ ïð© ì ó î íè§ ï ó î ïð§ î
-ò¬ò§ ï ó © ï m îðð ó î òë ¨ ï
§ î ó © î m î ìð ó í ¨ î
© í õ © ì } îð ¨ í
§ ï m ðô§ î m ð ô © ï m ðô© î m ðô ð } © í } êððð ô© ì m ð

Ï í ø ¨ ÷ ã Ó .²,³ « ³ ïé ð© ï õ ïëð© î õ íê© í õ ïð© ì ó î íè§ ï ó î ïð§ î
-ò¬ò§ ï ó © ï m îðð ó î ¨ ï
§ î ó © î m î ìð ó î òì ¨ î
© í õ © ì } ïê ¨ í
§ ï m ðô§ î m ð ô © ï m ðô© î m ðô ð } © í } êððð ô© ì m ð

In actuality, crop yields are uncertain, depending upon weather conditions during the growing season.

Three scenarios have been identified

- "good" (20% higher than average)
- "fair" (average)
- "bad" (20% below average),

each equally likely:

	É ¸ » ¿ ¬ § · »´¼	Ý ± ® ² § · »´¼	Þ » » ¬ § · » ´¼
ï ò Ù ± ±¼		íòê	
î ò Ú ¿ · ®		í	
	î		ï ê

Í ½ » ² ¿ ® · ± ý ï æ þ Ù ± ±¼ þ Ç · » ´¼ æ Ñ ° ¬ · ³ ¿ ´ Ð ®± ° · ¬ ã ü ï ê é ôê ê é

	É ¸ » ¿ ¬	Ý ± ®²	Í « ¹ ¿ ® Þ » » ¬ -
Ð ´ ¿ ² ¬	ï è í ò í í í ß ½ ® » -	ê ê òê é ß ½ ® » -	î ë ð ß ½ ® » -
Ç · » ´¼	ë ë ð Ì	î ì ð Ì	ê ð ð ð Ì
Í ¿ ´ » -	í ë ð Ì	óó	ê ð ð ð Ì
Ð « ® ½ ¸ ¿ - »	óó	óó	óó

Í ½ » ² ¿ ® · ± ý í æ þ Þ ¿ ¼ þ Ç · » ´¼ æ Ñ ° ¬ · ³ ¿ ´ Ð ®± ° · ¬ ã ü ë ç ô ç ë ð

	É ¸ » ¿ ¬	Ý ± ®²	Í « ¹ ¿ ® Þ » » ¬ -
Ð ´ ¿ ² ¬	ï ð ð ß ½ ® » -	î ë ß ½ ® » -	í é ë ß ½ ® » -
Ç · » ´¼	î ð ð Ì	ê ð Ì	ê ð ð ð Ì
Í ¿ ´ » -	óó	óó	ê ð ð ð Ì
Ð « ® ½ ¸ ¿ - »	óó	óó	óó

x ° ¿ ° » ® ° » ½ ¬ ° ± ® » ½ ¿ - ¬ © ¿ - ¿ ª ¿ · ´ ¿ ¾ ´ » ô ¬ ¸ » ² ô ¬ ¸ » » ¨ ° » ½ ¬ » ¼ ° ® ± ° · ¬ © ± « ´ ¼ ¾ »

Ï ⁄ í l ü ï ê é ô ê ê é ð Ï ⁄ í l ü ï ï è ô ê ð ð õ Ï ⁄ í l ü ë ç ô ç ë ð ã ü ï ï ë ô ì ð ê

Ô x ò Û ß Î Ð Î Ñ Ù Î ß Ó Ó xÒ Ù Ó Ñ Ü Û Ô

Ó .²·³ ·¦» ïëð ¨¡ õ Î í ð ¨¡ õ Î ê ð ¨¡ õ Î í è§¡ ó ï é ð ©¡ õ Î ï ð §¡ ó ï ë ð ©¡ ó í ê©¡ ó ï ð ©¡

-«¾¶»½¬ ¬±

¨¡ õ ¨¡ õ ¨¡ } ë ð ð
Î ìë ¨¡ õ §¡ ó ©¡ m Î ð ð
Í ¨¡ õ §¡ ó ©¡ m Î Ì ð
©¡ õ ©¡ } Î ð ¨¡
©¡ } ê ð ð ð
¨¸ m ð ô ·ã ï ô Î ô Í ô m ð ô ·ã ï ô Î å© ¸ m ð ô ·ã ï ô Î ô Í ô Ì

é

Ñ Ð Ì×Ó ß Ô Í Ñ Ô Ë Ì × Ñ Ò

Ð ®±º·¬ ãü ï ï è ôê ð ð

	Ë ¸»¿¬	Ý ± ®²	Í «¹¿®Þ»»¬-
Ð´¿²¬	ï Î ð ß½®»-	è ð ß½®»-	í ð ð ß½®»-
Ç ·»´¼	í ð ð Ì	î Ì ð Ì	ê ð ð ð Ì
Í¿´»-	ï ð ð Ì	óó	ê ð ð ð Ì
Ð«®½¸¿-»	óó	óó	óó

è

DATA

	Wheat	Corn	Sugar Beets
Average Yield	2.5 T / Acre	3 T / Acre	20 T / Acre
Planting cost	$150 / Acre	$230 / Acre	$260 / Acre
Selling price	$170 / T	$150 / T	$36 / T first 6000T
			$10 / T otherwise
Purchase price	$238 / T	$210 / T	
Minimum Rqmt	200T	240T	

ê

Ü Û Ý x Í x Ñ Ò Ê ß Î x ß Þ Ô Û Í

É » ¼ · - ¬ · ² ¹ « · - ¸ ¾ » ¬ © » » ² ¬ © ± - § ° » - ± º ¼ » ½ · - · ± ² - æ

Ú · ® - ¬ - ¬ ¿ ¹ » ø ¾ » º ± ® » ¹ ® ± © · ² ¹ - » ¿ - ± ² ÷ æ

¨ ¡ ã ¿ ½ ® » - ± º ´ ¿ ² ¼ ° ´ ¿ ² ¬ » ¼ · ² © ¸ » ¿ ¬

¨ ¡ ã ¿ ½ ® » - ± º ´ ¿ ² ¼ ° ´ ¿ ² ¬ » ¼ · ² ½ ± ® ²

¨ ¡ ã ¿ ½ ® » - ± º ´ ¿ ² ¼ ° ´ ¿ ² ¬ » ¼ · ² ¾ » » ¬ -

Í » ½ ± ² ¼ - ¬ ¿ ¹ » ø ¿ º ¬ » ® ¸ ¿ ® ª » - ¬ ÷ æ

© ¡ ã ¬ ± ² - ± º © ¸ » ¿ ¬ - ± ´ ¼

© ¡ ã ¬ ± ² - ± º ½ ± ® ² - ± ´ ¼

© ¡ ã ¬ ± ² - ± º ¾ » » ¬ - - ± ´ ¼ ¿ ¬ ü í ê ñ Ì

© ¡ ã ¬ ± ² - ± º ¾ » » ¬ - - ± ´ ¼ ¿ ¬ ü ï ð ñ Ì

§ ¡ ã ¬ ± ² - ± º © ¸ » ¿ ¬ ° « ® ½ ¸ ¿ - » ¼

§ ¡ ã ¬ ± ² - ± º ½ ± ® ² ° « ® ½ ¸ ¿ - » ¼

ê

Ñ Ë Ì Ô × Ò Û

- Í ³ ¿ ´´ Û ¨ ¿ ³ º ´ » æ ¬ ¸ » Ú ¿ ® ³ » ® ù - Ð ® ± ¾ ´ » ³
- Ì © ± ó - ¬ ¿ ¹ » Ô · ² » ¿ ® Ð ® ± ¹ ® ¿ ³ ³ · ² ¹ © · ¬ ¸ Î » ½ ± « ® - »
- Ì ¸ » Ü » ¬ » ® ³ · ² · - ¬ · ½ Û ¯ « · ª ¿ ´ » ² ¬ Ð ® ± ¾ ´ » ³
- þ Í º ´ · ¬ ¬ · ² ¹ þ Ú · ® - ¬ ó Í ¬ ¿ ¹ » Ê ¿ ® · ¿ ¾ ´ » -
- Ô ¿ ¹ ® ¿ ² ¹ · ¿ ² Î » ´ ¿ ¨ ¿ ¬ · ± ² ú Ü « ¿ ´ · ¬ §
- Þ » ² ¼ » ® - ù Ü » ½ ± ³ º ± - · ¬ · ± ²
- Ý ® ± - - ó Ü » ½ ± ³ º ± - · ¬ · ± ²
- Ò « ³ » ® · ½ ¿ ´ Û ¨ ¿ ³ º ´ »
- Î » - » ¿ ® ½ ¸ x - - « » -
- Î » º » ® » ² ½ » -

í

Û È ß Ó Ð Ô Û

- A farmer raises wheat, corn, and sugar beets on 500 acres of land. Before the planting season he wants to decide how much land to devote to each crop.
- At least 200 tons of wheat and 240 tons of corn are needed for cattle feed, which can be purchased from a wholesaler if not raised on the farm.
- Any grain in excess of the cattle feed requirement can be sold at $170 and $150 per ton of wheat and corn, respectively.
- The wholesaler sells the grain for 40% more (namely $238 and $210 per ton, respectively.)
- Up to 6000 tons of sugar beets can be sold for $36 per ton; any additional amounts can be sold for $10 / ton.

ì

"A Cross-Decomposition Algorithm for Two-Stage Stochastic Linear Programming"

Dennis Bricker
Dept. of Industrial Engineering
The University of Iowa

AMCS Seminar
6 October 2000

Abstract: We consider a paradigm of linear optimization in the face of uncertainty, in which (first-stage) decisions must be made before the uncertainty is resolved, and then recourse (second-stage decisions) is available to compensate. When a finite set of scenarios can be identified and their probability estimated, and the objective is to minimize the sum of the first-stage cost and the expected value of the second-stage cost, a (generally large) deterministic equivalent LP problem can be constructed. Benders' (primal) decomposition and Lagrangian (dual) decomposition each yields a family of smaller subproblems, one for each scenario, and a coordinating "master" problem. Cross-decomposition is a hybrid primal-dual iterative approach which eliminates the master problems and uses the primal and dual subproblems to provide both upper and lower bounds on the optimal expected cost at each iteration. A small example illustrates the computation.